Компоненты связности, эйлеровы цепи

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение $\sim$, определённое на множестве S, называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам рефлективности, симметричности и транзитивности:

1. $\forall s_1 \in S \; s_1 \sim s_1$
2. $\forall s_1, s_2 \in S \; s_1 \sim s_2 \longrightarrow s_2 \sim s_1$
3. $\forall s_1, s_2, s_3 \in S \; s_1 \sim s_2 \wedge s_2 \sim s_3 \longrightarrow s_1 \sim s_3$

Все элементы множества S, эквивалентные элементу s_i, образуют множество S_i, которое называется классом эквивалентности. Два различных класса эквивалентности не могут иметь какого-либо общего элемента, в противном случае такие классы совпадают, что следует из свойств $1 - 3$. Таким образом, определённое на множестве S отношение эквивалентности выполняет разложение его на непересекающиеся классы S_i эквивалентности, т.е. $S = \bigcup_i S_i$, где $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$.

Пример 1. Пусть S – множество треугольников. Определим на S бинарное $\sim$ отношение. Будем считать, что для треугольников $a, b \in S$ выполняется отношение $a \sim b$, если они подобные. Очевидно, что данное отношение является отношением эквивалентности, так как свойства $1 - 3$ выполняются для подобных треугольников. Введенное отношение разбивает множество треугольников на классы эквивалентности подобных треугольников.

Пример 2. Пусть S множество -мерных векторов. Определим на S бинарное $\sim$ отношение. Будем полагать, что для $\vec{a}, \vec{b} \in S$ выполняется отношение $\vec{a} \sim \vec{b}$, если они коллинеарные. Данное отношения является отношением эквивалентности, так как свойства $1 - 3$ выполняются для коллинеарных векторов. Множество векторов под действием введённого отношения разбивается на классы эквивалентности коллинеарных векторов.

Пример 3. Пусть $S = \{1,2, \dots, n\}$. Определим на S бинарное $\sim$ отношение. Будем полагать, что для $p, q \in S$ выполняется отношение $p \sim q$, если они имеют одинаковые остатки от деления на целое положительное число m. Данное отношение является отношением эквивалентности. Множество S под действием введённого отношения разбивается на классы эквивалентности чисел с одинаковыми остатками от деления на m.

Пример 4. Пусть S – множество треугольников. Определим на S бинарное $\sim$ отношение. Будем считать, что для треугольников $a, b \in S$ выполняется отношение $a \sim b$, если их площади равны. Данное отношение является отношением эквивалентности.

Связные компоненты

Пусть псевдограф $\Gamma = (X, U, \Phi)$ является неориентированным. Две вершины $x_1, x_2 \in X$ называются связными, если существует маршрут из x_1 в x_2. Определим на множестве вершин X бинарное $\sim$ отношение. Для $x_1, x_2 \in X$ отношение $\sim$ будет выполняться, т.е. $x_1 \sim x_2$, если эти вершины связные. Введённое отношение является отношением эквивалентности. Действительно, если вершина x_1 связана с x_2, а вершина x_2 связана с x_3, то очевидно, что вершина x_1 связана x_3. Следовательно, существует такое разложение множества вершин $X = \bigcup_i X_i$ на попарно непересекающиеся подмножества, что все вершины в каждом X_i связаны, а вершины из различных X_i не связаны. Тогда можно записать разложение $\Gamma = \bigcup_i \Gamma(X_i, U_i, \Phi)$ графа $\Gamma = (X, U, \Phi)$ на непересекающиеся связные подграфы $\Gamma(X_i, U_i, \Phi)$. Вследствие попарного непересечения подграфов, разложение называется прямым, а сами подграфы называются компонентами связности графа Γ.

Таким образом, следующее утверждение. Каждый неориентированный граф распадается единственным образом в прямую сумму своих компонент связности.

Количество компонент связности находится в определённом отношении с основными параметрами графа – числом его вершин и рёбер. Пусть $\Gamma = (X, U, \Phi)$ является простым графом с n вершинами и k компонентами связности. Число рёбер в таком графе не может превосходить величины $C_{n-k+1}^2 = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим прямое разложение $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma(X_i, U_i, \Phi)$ на компоненты связности. Если положить, что число вершин в компоненте X_i связности равно n_i, то число рёбер в таком графе не превосходит $\sum_{i=1}^k C_{n_i}^2$. Данная величина достигается в том случае, когда каждая из компонент связности является полным подграфом. Допустим, что среди компонент связности $\Gamma(X_i, U_i, \Phi)$ найдутся хотя бы две, которые имеют более одной вершины, например $n_2 \geq n_1 > 1$. Перенесём одну вершину из Γ_1 в Γ_2. Легко видеть, что это увеличивает число рёбер в модифицируемом полном графе с k компонентами связности. Отсюда следует, что максимальное число рёбер должен иметь граф, состоящий из $k-1$ изолированной вершины и одного полного подграфа с $n-k+1$ вершинами.

Из этого доказательства следует одно интересное следствие. Граф с n вершинами и числом рёбер, большим чем $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, связен.

Выделение компонент связности

Рассмотрим алгоритм нахождения числа компонент связности, а также выделения этих компонент на неориентированном графе. Подобным образом решается задача и для ориентированного графа. В основу описываемого алгоритма положена рассмотренная ранее техника поиска в глубину. Работа рассматриваемого алгоритма направлена на формирование вектора $Mark[x]$ меток вершин $x \in X$ графа. Элементу $Mark[x]$ присваивается общий номер той компоненты, которой принадлежит вершина $x \in X$.

Листинг 1

```
procedure Component(x, count);
begin
  Mark[x]:=count;
  for v ∈ Adj[x] do
  begin
    if Mark[v]=0 then
      Component(v, count);
  end;
end;
for v ∈ X do
  Mark[v]:=0;
```

```
count:=0;
for v∈X do
  if Mark[v]=0 then
  begin
    count:=count+1;
    Component(v,count);
  end;
```

Легко показать, что сложность этого алгоритма, как и сложность поиска в глубину, составляет $O(|X| + |U|)$.

Эйлеровы цепи

Классической в теории графов является следующая задача. Имеются два острова, соединённых семью мостами с берегами реки и друг с другом, как показано на рисунке.

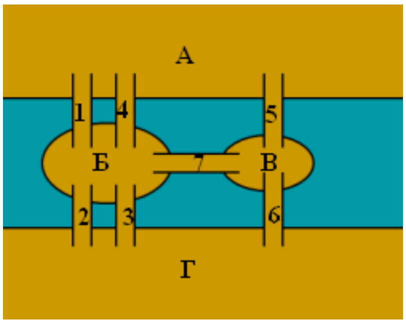

Рисунок 1

Задача состоит в следующем: осуществить прогулку по городу таким образом, чтобы, пройдя по каждому мосту один раз, вернуться обратно. Решение этой задачи сводится к нахождению некоторого специального маршрута на графе[1].

Определение. Пусть $\Gamma = (X, U, \Phi)$ - неориентированный псевдограф. Цепь в Γ называется эйлеровой, если она проходит по одному разу через каждое ребро псевдографа Γ. Замкнутая эйлеровая цепь называется эйлеровым циклом.

Поставим в соответствие плану расположения суши и мостов мультиграф, в котором каждой часи суши соответствует вершина, а каждому мосту – ребро, соединяющее соответствующие вершины.

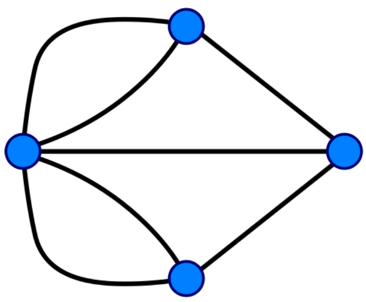

Рисунок 2

[1] На карте старого Кёнигсберга был ещё один мост, появившийся чуть позже, и соединявший остров Ломзе с южной стороной. Своему появлению этот мост обязан самой задаче Эйлера. А произошло это вот как. Кайзер Вильгельм славился своей прямотой, простотой мышления и солдатской «недалёкостью». Однажды, находясь на светском рауте, он чуть не стал жертвой шутки, которую с ним решили сыграть учёные умы, присутствующие на приёме. Они показали кайзеру карту Кёнигсберга, и попросили попробовать решить эту знаменитую задачу. К всеобщему удивлению, кайзер попросил перо и лист бумаги. Разумеется бумагу и чернила быстро нашли. Кайзер положил листок на стол, взял перо, и написал: «приказываю построить восьмой мост на острове Ломзе». Так в Кёнигсберге и появился новый мост, который так и назвали — мост кайзера.

Теперь задачу можно переформулировать так: найти эйлерову цепь в мультиграфе. Решение этой задачи было дано Л. Эйлером.

Теорема. Эйлерова цепь в псевдографе существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. Граф связный
2. Степени внутренних вершины чётные (внутренние вершины не являются началом или концом цепи)
3. Если вершины a и b являются началом и концом цепи и $a \neq b$, то степени их нечётные
4. Если вершины a и b являются началом и концом цепи и $a = b$, то степени их чётные

Доказательство (прямое). Дано, что существует эйлерова цепь $au_1x_2u_2 \dots x_nu_nb$, где $a, b, x_i \in X$, $u_i \in U$, в которой содержатся все рёбра по одному разу. Такая цепь включает все вершины графа, если граф не содержит изолированных вершин. Докажем условия $1 - 4$.

1. По данной цепи можно попасть из одной вершины в любую другую, значит граф связный.
2. Каждая тройка цепи $u_{i-1}x_iu_i$ привносит вершине x_i степень 2, а так как все рёбра u_i в цепи различные, то степени внутренних вершин чётные
3. См. п. 2.
4. См. п. 2.

Доказательство (обратное). Даны условия $1 - 4$, построим эйлерову цепь. Предварительно приведём условие 3 к условию 4 включением в граф фиктивного ребра u^*, которым свяжем вершины a, b. Теперь и в случае 3 все вершины будут иметь чётную степень. Пусть $A \in X$ - произвольная вершина. Из неё будем строить цепь, выбирая в качестве продолжения пути ребро, которое ещё не пройдено. Эта цепь может закончиться только в вершине A, так как, при входе в любую другую вершину, всегда существует ребро, по которому из неё можно выйти.

Возможны два случая:

1. Построенный цикл Γ_1 содержит все рёбра графа, и тогда теорема доказана.
2. Построенный цикл Γ_1 содержит не все рёбра графа. В этом случае необходимо рассмотреть граф Γ/Γ_1, полученный удалением из исходного графа Γ всех рёбер, входящих в цикл Γ_1. Рассматриваемый граф Γ/Γ_1 вновь содержит только вершины с чётными степенями. Так как исходный граф связный, то в графе Γ_1 существует вершина, инцидентная ребру из Γ/Γ_1. Пусть это вершина $B \in X$. Построим из неё цикл Γ_2 так же, как строили цикл Γ_1. Построим общий цикл Γ_{12}, путём объединения циклов Γ_1 и Γ_2. Для Γ_{12} вновь проверяем рассмотренные выше два случая, как для Γ_1.

Процесс расширения продолжаем до тех пор, пока не будут включены все рёбра графа в один цикл $Au_1x_2u_2 \dots au^*b \dots x_nu_nA$. Разрывая данный цикл по ребру u^*, мы получим эйлерову цепь.

Конструктивный характер доказательства теоремы позволяет на формальном уровне записать алгоритм поиска эйлеровой цепи. Будем предполагать, что исходный граф представлен структурой смежности $Adj[x]$, где $Adj[x]$ – множество вершин, смежных с $x \in X$. Результирующая эйлерова цепь формируется в множестве Z.

Листинг 2

```
procedure Cycle(v,R);
```

```
begin
  R ≔ v;
  REPEAT
    w ≔ Adj[v];
    R:= R ∪ {w};
    Adj[v] = Adj[v]\{w};
    if w ≠ v then
      Adj[w] ≔ Adj[w]\{v};
    v:= w;
  UNTIL not |Adj[v]| > 0
end;
∃v ∈ X;
Z ≔ {v};
R ≔ ∅;
REPEAT
  Cycle(v,R);
  Z ≔ Z ∪ R;
UNTIL not ∃v ∈ Z |Adj[v]| > 0
```

Частные же циклы, расширяющие Z, представляются множеством R. Рёбра, включённые в частный цикл R (а значит, и в Z), удаляются как пройденные из структуры смежности $Adj[x]$.Формирование расширяющихся циклов R осуществляется до тех пор, пока структура смежности графа содержит хотя бы одно ребро.

Сложность алгоритма поиска эйлеровой цепи

Очевидно, что число обращений к процедуре Cycle не больше числа вершин $|X|$. При каждом обращении количество выполняемых действий пропорционально числу рёбер, входящих в выделенный цикл. Сложность суммарной работы процедуры Cycle пропорциональна количеству рёбер $|U|$ в графе, поэтому и сложность выделения эйлеровой цепи составляет $O(|U|)$.